|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Место занятия в расписании** | **Тема** | **Цели** | **Задачи** | **Контрольные вопросы и задания** | **Д/з** |
| Дата | 13.01.22 | **Элементы теории комплексных чисел.** | Дидактическая | Ознакомить студентов с элементами теории комплексных чисел. | 1) Ознакомить студентов с элементами теории комплексных чисел. | 1. Какие числа называются комплексными?2. Сколько форм имеет комплексное число?3. Какие действия с комплексными числами удобно выполнять в алгебраической форме?4. Что такое модуль к.ч.?5. Что такое аргумент к.ч.?6. Как составить тригонометрическую и показательную формы числа?  | **Изучить конспект, ответить на контрольные вопросы** |
| Группа | ТМ101 | Развивающая | Развивать логическое мышление и память. |
| Пара | IV | Воспитательная | Воспитывать любознательность и самостоятельность. |
| № занят. | 5 |

**13.01**

### Элементы теории комплексных чисел

Изучение действительных чисел показывает, что их недостаточно для решения алгебраических уравнений.

Например, Вы знаете, что уравнение  (*R* (*i=*1,2,3),*≠0*) при *D=─* 4*<0* не имеет действительных корней.

Решение алгебраических уравнений второй, третьей, четвертой и т. д. степеней приводит к необходимости расширить множество действительных чисел так, чтобы простейшее из указанных выше уравнений  имело решение.

***Определение.*** *Комплексными числами* называются пары (*a,b*) действительных чисел *a* и *b*, если для них определены понятия равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (*a*1*,b*1) и (*a*2*,b*2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда *a*1 *= a*2  и *b*1= *b*2.

2. *Суммой* двух комплексных чисел (*a*1*,b*1) и (*a*2*,b*2) называется комплексное число (*a*1+ *a*2*,b*1+ *b*2).

3. *Произведением* двух комплексных чисел (*a*1*,b*1) и (*a*2*,b*2) называется комплексное число (*a*1 *a*2 ─ *b*1*b*2 , *a*1*b*2+*a2 b*1).

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

  тогда и только тогда, когда *a*1 *= a*2  и *b*1= *b*2;(1)

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны:

, (2)

. (3)

Из формул (2), (3) вытекают, в частности, соотношения



которые показывают, что операции над комплексными числами вида совпадают с операциями над действительными числами *a*. Поэтому комплексные числа  отождествляются с действительными числами: 

Из всех комплексных чисел выделяют число (0,1), которое называют *мнимой единицей* и обозначают буквой *i*, т.е. *i=*(0,1). Вычислим по формуле (3) произведение . Имеем:



Таким образом, получаем, что число *i* является корнем уравнения *.*

Комплексные числа не являются числами в элементарном смысле этого слова, применяемыми при подсчетах и измерениях. Это математические объекты, определяемые свойствами, данными выше. Если множество комплексных чисел обозначить буквой ***C***, то получим ***R******С***.

***Определение.*** Запись комплексного числа в виде называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Число *a* называют действительной частью числа , число *b* – мнимой частью комплексного числа или коэффициентом при мнимой части комплексного числа  и записывают: *a=*Re*(z)* или *a=*Re*(a+ib),* *b=*Im*(z)* или *b=*Im*(a+bi).* Обозначения Re*,* Im произошли от французских слов “*reele*” – действительный и “*imaginaire*” – мнимый. Числа вида *bi* называются чисто мнимыми.Число (0,0) является одновременно действительным и чисто мнимым.

***Пример.*** ,  – комплексные числа, 2 и  – действительные части, 3 и ─5 мнимые части.

Рассмотрим сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме.

С помощью алгебраической формы комплексного числа формулы (1)─(3) записываются так:

тогда и только тогда, когда и ;

 (4)

 (5)

 Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативности* (*переместительное свойство*):



2. *Ассоциативности* (*сочетательное свойство*):



3. *Дистрибутивности* (*распределительное свойство*):



***Пример.*** Найти сумму чисел 

Решение. 

***Пример.*** Найти произведение  чисел  и 

Решение. Из условия имеем , , , .

Тогда .

В множестве комплексных чисел можно ввести операцию, обратную к операции сложения.

 ***Определение.*** *Разностью* двух комплексных чисел  и  называется комплексное число , сумма которого с числом  равна числу .

Из определения следует, что если , то Действительная часть разности двух комплексных чисел  и  равна разности действительных частей этих чисел, мнимая – разности мнимых частей

 ***Пример.*** Найти разность чисел 

Решение.

***Определение.*** *Частным* от деления комплексного числа  на комплексное число   называется комплексное число  такое, что выполняется равенство .

 ***Правило деления комплексных чисел.*** Чтобы разделить комплексное число  на , нужно числитель и знаменатель дроби  умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е. .

 ***Примеры.*** Выполнить деление.

1. 

2. 

Рассмотрим два случая извлечения квадратного корня:

1. извлечение квадратного корня из отрицательного действительного числа *a*.
2. извлечение квадратного корня из комплексного числа *a + bi*.

Первый случай. Рассмотрим уравнение , где *a* < 0. Представим или .Уравнение примет вид . Откуда . Значит, уравнение , где *a*<0 имеет два корня: , .

***Пример.*** Найти все значения , .

Решение. ; .

Второй случай. Пусть требуется найти все значения . Обозначим , где *z = u + iv*, числа *a, b, u, v* – действительные. Выполним преобразования: =*u+iv,* , .

На основании условия равенства комплексных чисел составим систему уравнений:



Решив эту систему, найдем , а значит и все значения корня. Подробно рассмотрим решение этой задачи на примере.

***Пример.*** Найти все значения выражения .

Решение. , *z = u + iv* (*u, v* – действительные числа), тогда , откуда



Первое уравнение системы примет вид: , *v* ≠ 0. Отсюда *v*4  + 5*v*2 – 36 = 0, решив это уравнение, получим =4, *v*1=2, *v*2=─2. Из уравнения  найдем *u*1 = ─ 3, *u*2 = 3.

Значит,  и 

Проверим: 

Ответ: .

***Замечание.*** Корень квадратный из комплексного числа, т.е. , имеет два взаимно противоположных значения.

Уравнение вида *az2 + bz + c* = 0, где *a*≠0, *a, b, c* – как действительные, так и комплексные числа, решается по формулам:

1. , где *b2 –* 4*ac = D* – дискриминант.
2. , где *b =* 2*k*.
3. , если *a* = 1, *b* = 2*k*.

Корни уравнения *az*² + *bz* + *c* = 0 могут быть как действительными, так и комплексными. Для комплексных корней также справедлива теорема Виета и формула разложения левой части на множители.

Если *z*1 и *z*2 – корни уравнения *az*2 + *bz* + *c* = 0, то

1. .
2. .
3. *az*2 + *bz* + *c* = *a*( *z* – *z*1)(*z* – *z*2).

***Примеры.*** Решите уравнения.

 1*.* 

 2. 

 3. 

 4. 

 5. 

Решение уравнений.

1. Разложим левую часть уравнения на множители, получим  откуда 

Ответ: 

2. Представим уравнение следующим образом: 

 откуда . Пусть *z* = *x* + *iy*, где *x, y*  ***R***, тогда . Возведем обе части уравнения в квадрат и применим условие равенства двух комплексных чисел.

, . Составим систему уравнений:



 .

Решив уравнение, найдем , . Второе значение не подходит, так как *x*  ***R***. Итак, *x*1 = 1, тогда , *x*2 = ─1, тогда .

Получим , .

Проверим: .

Ответ: 

3. Применим формулу 3): .

Получили ,  ─ два комплексно-сопряженных числа.

Проверим: для  получим .

Для получим .

Ответ: .

4. Применим формулу 3): 

Ответ: *.*

5. Применим формулу 3): 

Найдем ; *x, y*  ***R***. Откуда .

Воспользуемся условием равенства двух комплексных чисел:



Из второго уравнения найдем  и подставим в первое:

, *x*4 – 8*x*2 – 9 = 0, *x*2 = 9, *x*2 = -1 (не подходит, так как *x*  ***R***).

Получили , тогда , значение корня 

Покажем, что из этих двух значений достаточно взять одно, или же в формулах 1), 2) и 3) перед корнем взять один знак и брать оба значения корня. (Это утверждение можно доказать в общем виде).

Найдем :

.

.

Получили в обоих случаях *z*1 = 13 – *i*, *z*2 = 7 + *i*.

Ответ: 13 – *i*, 7 + *i*.

**ВЫВОДЫ**

1. Комплексное число *z* в алгебраической форме имеет вид:

*z =a+bi*, где

*a –* действительная часть комплексного числа,

*b –* мнимая часть комплексного числа,

*i* *–* мнимая единица.

1. Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Если  и , то ,  и наоборот, если , , то .

1. Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда

*a* = 0, *b* = 0.

1. Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел выполняются как операции с многочленами, учитывая степень числа *i.*

, , , , где *k*, *m* – натуральные числа, 0≤*m*≤3.

1. Операция деления двух комплексных чисел выполняется умножением знаменателя и числителя дроби (делимого и делителя) на число, сопряжённое знаменателю (делителю).
2. Имеют место все формулы сокращённого умножения и добавляется формула суммы квадратов двух чисел: 
3. Операция извлечения квадратного корня из комплексного числа выполняется в алгебраической форме. При отрицательном дискриминанте уравнение имеет комплексные корни.

Как и для всякого вектора определим модуль комплексного числа  или .

Изобразим на комплексной плоскости вектор, соответствующий числу. Из рисунка по теореме Пифагора находим  и видим, что  ─ расстояние от точки  до начала координат *О* или расстояние от точки  до точки *О*.

Нетрудно заметить, что имеют место неравенства 

***Пример.*** Вычислить .

Решение. .

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел.

Число изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов и  (рис.4).

***Пример.*** Выяснить геометрический смысл выражения .

Решение. Из геометрического смысла  следует, что точка  удалена от начала координат на 3 единицы. Такая точка не единственная. Известно, что множество точек, равноудалённых от одной точки – окружность.

Получим, что  - окружность радиуса 3 с центром в точке *О*. Можем получить уравнение этой окружности в декартовой прямоугольной системе координат: , отсюда  или  ─ уравнение окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

Вы научились выполнять арифметические операции, извлечение квадратного корня для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Некоторые операции, в частности, извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа выполняются в тригонометрической форме. Перейдем к изучению этой формы задания комплексного числа.

Положение точки на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами , но и полярными координатами  (см. рис. 14), где  – расстояние от точки О до точки (или модуль ), а - угол между действительной осью и вектором , отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отcчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелки – отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа (≠ 0) и обозначается . Для числа **аргумент не определен, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что ≠ 0. Из рисунка видно, что

, .

Значит, любое комплексное число ≠ 0 можно представить в виде  или .

***Определение.*** Записькомплексного числа *z* в виде , где , называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Очевидно, что если и , то

, . (6)

***Замечание 1.*** Система уравнений (6) имеет бесконечно много решений и все эти решения задаются формулой  (*k* = 0, ±1, ±2, …), поэтомудля числа ≠ 0 аргумент определяется не однозначно, т.е. если *, то*  (*k* = 0, ±1, ±2, …) – тоже аргументы *z*. Главным значением аргумента числа *z* ≠ 0 принято называть аргумент из промежутков  или [0;2*π*).

***Замечание 2.*** Не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является его тригонометрической формой. Например, записи ,  не являются тригонометрической формой числа , хотя равенства верные. (Объясните).

***Утверждение.*** Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны модули этих чисел, а аргументы отличаются на , где *k* – целое число.

Пусть , .

Если , то , , где *k* – целое.

Из системы (6) вытекает, что аргумент  комплексного числа удовлетворяет уравнению

 . (7)

Но следует иметь в виду, что не все решения уравнения (7) являются решениями системы (6). Так как знаки тангенса в первой и третьей четвертях, во второй и четвертой четвертях совпадают, то значение главного аргумента находят по правилу:



 ***Пример 1.*** Найти на комплексной плоскости точки *z*, удовлетворяющие условию . Это все точки плоскости, расположенные между лучами  и , включая точки луча , но исключая точки луча  (cм. рис.15).



***Пример 2.*** Записать данные числа в тригонометрической форме.

|  |  |
| --- | --- |
| 1.  |  |
|  |  |
| 2.  |  |
|  | , |
|  |

Если , , то имеем . Комплексное число  обозначается символом , т.е. =. Тогда любое комплексное число ≠ 0 можно представить в виде

.

***Определение.*** Записькомплексного числа *z* в виде , где , называется *показательной формой* комплексного числа.

.

Рассмотрим возведение комплексного числа в степень с натуральным показателем. В этом случае задача сведётся к умножению равных множителей, поэтому имеет место формула

** или

**,

где

*При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем n модуль данного числа возводится в степень n, а аргумент умножается на n.*

***Пример.*** Вычислить 

Решение. Представим числа  и  в тригонометрической форме, получим:

, 

Запишем данное выражение в тригонометрической форме:









Ответ: 

**Формула Муавра**

В формуле  положим , тогда получим частный случай возведения комплексного числа в степень *n*:



Эта формула называется формулой Муавра. Формулу Муавра (в частности) применяют для выражения синусов и косинусов аргументов через синусы и косинусы аргумента .

***Пример.*** Используя формулу Муавра, вывести формулы двойного угла .

Решение. Вычислим двумя способами: возведением в квадрат по формуле Муавра и по формуле квадрата двучлена.

1. 
2. 



Воспользуемся условием равенства комплексных чисел, получим известные формулы:

*,* *.*

***Замечание.***Этим способом можно найти формулы для  и , если уметь возводить бином в степень *n*, т.е. вычислять 

***Задача.*** Найти частное  двух комплексных чисел  и 

Решение. Применим правило деления комплексных чисел в алгебраической форме.







Получим 

*Частное от деления двух комплексных чисел (не равных нулю) равно комплексному числу, модуль которого равен частному модулей, а аргумент равен разности аргументов данных чисел.*

***Пример.*** Вычислить: 

Решение.



***Определение.*** *Корнем n-й* степени из комплексного числа *z* называется такое комплексное число *w*, *n*-я степень которого равна *z*, т.е. , где *n* - натуральное число. (Обозначение )

***Теорема***. Для любого натурального числа *n* и любого комплексного числа , где z ≠ 0, существует *n* различных значений корня *n-*й степени, которые находятся по формуле:

,

где *k*=0, 1, 2…, *n*-1, *n****N***.

***Доказательство.*** Пусть , где ,

*ϕ* - главное значение аргумента.

Число *w* будем находить в виде: *,* т.е. необходимо найти *r* и α.

Из определения  или

**

Получим, что 

Два комплексных числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемым, кратным 2π.

Тогда , где *k* - целое, откуда , так как *r* ≥ 0, *α* = , *k* - целое число.

Чтобы значения корней были различными, число *k* должно принимать значения 0, 1, 2, …, *n* - 1.

Значение аргумента при *k*=0 будем обозначать *ϕ0*, т.е. *ϕ0*=.

Получим

,

где *k* = 0, 1, 2, 3, …, *n*-1.

***Пример.*** Найти все значения .

Решение. .

, где *k* = 0,1,2.

*k* = 0, тогда ;

*k* = 1, тогда ;

*k* = 2, тогда .

Ответ: 1; .

Можно доказать, что все значения  являются вершинами правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса , значения аргументов соседних точек отличаются на .